

Chapitre III

Représentation des algèbres trivalentes de Łukasiewicz par des parties floues.

1-Généralités sur les ensembles flous

Soit E un ensemble non vide et $P(E)$ l'ensemble des parties de E . $P(E)$ muni des opérations usuelles d'intersection (\cap), de réunion (\cup) et de complément (C) est une algèbre de Boole.

Si l'on note par U l'ensemble à deux éléments $U = \{0, 1\}$ on sait qu'il y a une correspondance (bijection) entre $P(E)$ et U^E (ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$) de la façon suivante :

A chaque partie A de E on associe sa fonction caractéristique

$f_A : P(E) \rightarrow U^E$ définie par :

$$A \rightarrow f_A$$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

A chaque application $\delta : E \rightarrow U$ on associe la partie $A = \delta^{-1}(1)$.

Dans tout ce qui suit nous conviendrons d'identifier chaque partie A avec sa fonction f_A .

Ainsi on écrira aussi bien

$$x \in A \text{ ou } A(x) = 1;$$

$$x \notin A \text{ ou } A(x) = 0.$$

Par ailleurs l'ensemble U ordonné naturellement ($0 < 1$) est une algèbre de Boole (en même temps qu'une chaîne) avec les opérations

$$\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta)$$

$$\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$$

$$\neg \alpha = 1 - \alpha.$$

Avec les identifications précédentes, les opérations ensemblistes se traduisent alors par :

$A \cap B$ est définie par : $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$, pour tout $x \in E$.

$A \cup B$ est définie par : $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$, pour tout $x \in E$.

CA est définie par : $(CA)(x) = \neg A(x)$, pour tout $x \in E$.

\emptyset est définie par : $\emptyset(x) = 0$, pour tout $x \in E$.

1-1- Structure floue

On appelle structure floue tout couple (E, J) où :

- E est un ensemble non vide quelconque (dont les éléments seront notés x, y, z, \dots).
- J est une chaîne fermée (c'est-à-dire avec un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1, avec $0 \neq 1$). Les éléments de J seront notés α, β, \dots

1-2- Partie floue

Dans une structure floue on appelle partie floue de E , toute application de E dans J .

Les parties floues seront généralement notées $\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$

L'ensemble des parties floues de E sera noté $\tilde{P}(E)$.

1-3- Parties nettes

Si $J = U = \{0, 1\}$ alors $\tilde{P}(E) = P(E)$ qui est l'ensemble des parties de E , dit l'ensemble des parties nettes de E .

1-4- Relation d'ordre sur les parties floues

On va maintenant définir une relation d'ordre sur $\tilde{P}(E)$ par :

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \text{ si et seulement si pour tout } x \in E : \tilde{A}(x) \leq \tilde{B}(x).$$

Cette relation d'inclusion est évidemment une relation d'ordre.

1-5- Réunion et intersection des parties floues

L'union et l'intersection dans $\tilde{P}(E)$ prolongent d'une manière naturelle l'union et l'intersection dans $P(E)$.

La réunion de deux parties floues \tilde{A}, \tilde{B} est définie par :

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \max (\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)).$$

L'intersection de deux parties floues \tilde{A}, \tilde{B} est définie par :

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \min (\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)).$$

Et on a : $\complement \tilde{A}(x) = 1 - \tilde{A}(x)$.

- $(\tilde{P}(E), \cup, \cap, \complement, \emptyset, E)$ est une algèbre de Boole.

1-6- Niveaux de flou

Posons $J^0 = J - \{0\}, J^1 = J - \{1\}, J^{01} = J - \{0, 1\}$.

Soit \tilde{A} une partie floue dans une structure floue (E, J) .

Pour tout $\alpha \in J$ on définit le niveau de flou de degré α comme étant l'application $N_\alpha : \tilde{P}(E) \rightarrow P(E)$ définie par :

$$N_\alpha(\tilde{A}) = \{x \in E / \tilde{A}(x) \geq \alpha\}.$$

Pour tout $\alpha \in J^1$ on définit le niveau strict de flou de degré α comme étant l'application $N'_\alpha : \tilde{P}(E) \rightarrow P(E)$ définie par :

$$N'_\alpha(\tilde{A}) = \{x \in E / \tilde{A}(x) > \alpha\}.$$

$(\tilde{P}(E), \cup, \cap, \complement, \emptyset, E, N_{1/2}, N_1)$ est une L_3 algèbre.

Propriétés

- $N_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cup N_\alpha(\tilde{B}).$

Preuve :

$$\begin{aligned} N_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B}) &= \{x \in E / (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) \geq \alpha\}. \\ &= \{x \in E / \max(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)) \geq \alpha\}. \\ &= \{x \in E / \tilde{A}(x) \geq \alpha \text{ ou } \tilde{B}(x) \geq \alpha\}. \\ &= \{x \in E / \tilde{A}(x) \geq \alpha\} \cup \{x \in E / \tilde{B}(x) \geq \alpha\}. \\ &= N_\alpha(\tilde{A}) \cup N_\alpha(\tilde{B}). \end{aligned}$$

- $N_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cap N_\alpha(\tilde{B}).$

Preuve :

$$\begin{aligned} N_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) &= \{x \in E / (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) \geq \alpha\}. \\ &= \{x \in E / \min(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)) \geq \alpha\}. \\ &= \{x \in E / \tilde{A}(x) \geq \alpha \text{ et } \tilde{B}(x) \geq \alpha\}. \\ &= \{x \in E / \tilde{A}(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in E / \tilde{B}(x) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

$$N_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cap N_\alpha(\tilde{B}).$$

- $N_\alpha(\emptyset) = \emptyset.$

Preuve :

$$\begin{aligned} N_\alpha(\emptyset) &= \{x \in E / \emptyset(x) \geq \alpha\}. \\ &= \{x \in E / 0 \geq \alpha\} \text{ tel que } \alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}. \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

- $N_\alpha(E) = E.$

Preuve :

$$N_\alpha(E) = \{x \in E / E(x) \geq \alpha\}.$$

$$N_\alpha(E) = \{x \in E / 1 \geq \alpha\} = E.$$

- Si $\alpha \leq \beta \Rightarrow N_\beta \leq N_\alpha$, c'est-à-dire $N_\beta(\tilde{A}) \subseteq N_\alpha(\tilde{A})$ pour tout \tilde{A} de $\tilde{P}(E)$.
- Si A est une partie nette : $N_\alpha(A) = A$ pour tout $\alpha \in J^0$.
- Quels que soient α, β dans J^0 : $N_\alpha N_\beta = N_\beta$.
- Si pour tout $\alpha \in J^0$: $N_\alpha(\tilde{A}) = N_\alpha(\tilde{B})$ alors $\tilde{A} = \tilde{B}$ (Principe de détermination de Moisil).

Ces propriétés restent valables pour les niveaux stricts de flou.

Définition[2][3][6]

Pour tout $x \in L$, on défini :

$\varphi_\alpha : L_3 \rightarrow C(L)$ (l'ensemble des éléments complémentés de L).

Tel que :

1. φ_α est un endomorphisme de L , conserve le 0 et le 1;
2. Si $\alpha \leq \beta$ alors $\varphi_\beta \leq \varphi_\alpha$;
3. Quels que soient α, β dans J^0 : $\varphi_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\beta$;
4. Si $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(y)$ pour tout α dans J^0 alors $x = y$ (Principe de détermination de Moisil).

2- Théorème de représentation de L_3 algèbres[1][2]

Considérons une L_3 algèbre.

X : espace dual de L (l'ensemble des ultrafiltres de L). On considère la structure floue $\tilde{P}(X) = (X, J)$

$$f : L \rightarrow \tilde{P}(X)$$

$x \rightarrow f(x)$ la fonction définie par :

$$f(x)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \}.$$

Preuve

1) f est un morphisme de treillis fermé

- $f(x \vee y)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x \vee y) \in U \}$

$$= \sup \{ \alpha \in J^0 / (\varphi_\alpha(x) \vee \varphi_\alpha(y)) \in U \} \quad \text{car } \varphi_\alpha \text{ endomorphisme.}$$

$$= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \text{ ou } \varphi_\alpha(y) \in U \}$$

$$= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \} \cup \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(y) \in U \}$$

$$= f(x)(U) \cup f(y)(U).$$

D'où $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$.

- $f(x \wedge y)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x \wedge y) \in U \}$

$$= \sup \{ \alpha \in J^0 / (\varphi_\alpha(x) \wedge \varphi_\alpha(y)) \in U \} \quad \text{car } \varphi_\alpha \text{ endomorphisme.}$$

$$= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \text{ et } \varphi_\alpha(y) \in U \}$$

$$= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \} \cap \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(y) \in U \}$$

$$= f(x)(U) \cap f(y)(U).$$

D'où $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$.

- $f(0)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(0) \in U \}$

$$= \sup \{ \alpha \in J^0 / 0 \in U \} \quad (\text{car } \varphi_\alpha \text{ conserve le } 0).$$

$$= \sup \emptyset$$

$$= 0.$$

D'où $f(0) = \emptyset$.

- $f(1)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(1) \in U \}$

$$= \sup \{ \alpha \in J^0 / 1 \in U \} \quad (\text{car } \varphi_\alpha \text{ conserve le } 1).$$

$$= \sup J^0$$

$$= 1.$$

D'où $f(1) = X$.

Donc f est un morphisme de treillis fermé.

$$2) f(\varphi_\beta(x)) = N_\beta(f(x)).$$

$$\begin{aligned} f(\varphi_\beta(x))(U) &= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(\varphi_\beta(x)) \in U \} \\ &= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\beta(x) \in U \} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi_\beta(x) \notin U; \\ 1 & \text{si } \varphi_\beta(x) \in U. \end{cases} \\ &= \sigma(\varphi_\beta(x)). \end{aligned}$$

Où σ est le monomorphisme de stone relative à X .

$$\begin{aligned} N_\beta(f(x)) &= \{U \in X / f(x)(U) \geq \beta\} \\ &= \{U \in X / f(x)(U) \in [\beta, 1]\} \\ &= \{U \in X / \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \} \in [\beta, 1]\} \\ &= \{U \in X / \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \} \geq \beta\} \\ &= \sigma(\varphi_\beta(x)). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(\varphi_\beta(x)) = N_\beta(f(x)).$$

3) f injective

Montrons finalement que f est injective.

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \emptyset.$$

$$\text{Ker } f = \{x \in L / f(x) = \emptyset\}.$$

$$\text{Si } x \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x) = \emptyset.$$

$$\Leftrightarrow f(x)(U) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) \notin U, \forall U \in X, \forall \alpha \in J^0.$$

$$\Leftrightarrow \neg \varphi_\alpha(x) \in U, \forall U \in X.$$

$$\Leftrightarrow \neg \varphi_\alpha(x) \in \cap U.$$

$$\Leftrightarrow \neg \varphi_\alpha(x) = 1.$$

$$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(0), \forall \alpha \in J^0.$$

Si $x \in \text{Ker } f \Leftrightarrow x = 0$ (Principe de détermination de Moisil).

Donc f est injective.

Par conséquent f est un monomorphisme d'algèbre de Łukasiewicz.